'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

# UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2023

## DSE1/2/3-P1-MATHEMATICS

## (REVISED SYLLABUS 2023)

*The figures in the margin indicate full marks.*

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.**
**The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.**
**Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

### DSE-1A

### NUMERICAL METHODS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 40

### GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***five*** questions: 1×5 = 5
নিম্নলিখিত যে-কোন ***পাঁচটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै ***पाँच*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) If $V_T = 3.753627$ and $V_A = 3.7537$ are the true value and approximate value respectively, then find absolute and relative errors.

যদি $V_T = 3.753627$ এবং $V_A = 3.7537$ যথাক্রমে সঠিক মান এবং আনুমানিক মান হলে absolute এবং relative ত্রুটিগুলি নির্ণয় কর।

यदि $V_T = 3.753627$ अनि $V_A = 3.7537$ कुनै संगले साँचो मान र अनुमानित मान भए निरपेक्ष त्रुटि र सापेक्ष त्रुटि निर्णय गर।

(b) Calculate $(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$.

$(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$-এর মান নির্ণয় কর।

$(\nabla \cdot \Delta)(x^2 + 4x)$ निर्णय गर।

(c) What is a sufficient condition for the convergence of Newton-Raphson method?

Newton-Raphson পদ্ধতিটি অভিসারি হওয়ার যথেষ্ট শর্তটি কি ?

Newton-Raphson पद्धति अभिकेन्द्रीत हुने पर्याप्त शर्तहरू के हो ?

(d) Why polynomials are used for approximating in interpolation?

কেন বহুপদী আসন্ন interpolation-এর জন্য ব্যবহৃত হয় ?

Interpolation अनुमानित गर्द बहुपदहरू किन प्रयोगमा आउँछ।

(e) What are the demerits of Lagrange's interpolation formula?

Lagrange interpolation সূত্রের ত্রুটিগুলি কি কি ?

Lagrange को interpolation सूत्र को अगुणहरू के हो ?

(f) What is the degree of approximating polynomial corresponding to the Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule?

Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule-এর প্রেক্ষিতে approximating বহুপদী রাশিমালার মাত্রা কি ?

Simpson को $\frac{1}{3}$ नियम संग सम्बन्धित अनुमानित बहुपदको डिग्री के हो ?

(g) What is the order of Convergence of Regula-Falsi method?

Regula-Falsi পদ্ধতির অভিসারনের ক্রম কি ?

Regula-Falsi पद्धतिको अभिकेन्द्रन को order के के हो ?

(h) Convert the following system of equations in diagonally dominant form:

নিম্নলিখিত সমীকরণ তন্ত্রটিকে diagonally dominant রূপে প্রকাশ করঃ

दिइएको समीकरण प्रणाली लाई विकर्ण dominant रूपमा परिणत गर।

$$x - y + 5z = 7$$
$$6x + y + z = 20$$
$$x + 4y - z = 6$$

## GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***three*** questions: 5×3 = 15

নিম্নলিখিত যে-কোন ***তিনটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***तीन*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) Explain the bisection method for computing a real root of the equation $f(x) = 0$. Also, give its geometrical interpretation.

$f(x) = 0$ কোন একটি সমীকরণের একটি বাস্তব বীজ নির্ণয়ের bisection পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা কর। এছাড়াও ইহার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

समीकरण $f(x) = 0$ को वास्तविक मूल गणना गर्ने bisection पद्धति व्याख्या गर। यस्को ज्यामितीय व्याख्या पनि गर।

(b) Solve the system by Gauss-Jacobi iteration method:

Gauss-Jacobi iteration পদ্ধতি অনুসারে সমাধান করঃ

दिइएको प्रणालीलाई Gauss-Jacobi iteration पद्धति द्वारा समाधान गरः

$$x + y + 4z = 9$$
$$8x - 3y + 2z = 20$$
$$4x + 11y - z = 33$$

(c) Given the following table, find $f(x)$ assuming it to be a polynomial of degree three in $x$.

নিম্নলিখিত সারণী দেওয়া আছে, $x$-এর তিন মাত্রাযুক্ত বহুপদী রাশিমালা ধরে $f(x)$ নির্ণয় করঃ

निम्न दिइएको तालिका बाट, $f(x)$ लाई $x$ मा degree तिन भएको polynomial मानी $f(x)$ निर्णय गर:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 2 | 11 | 34 |

(d) Evaluate $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$, by using Weddle's rule, taking 6 (six) intervals, correct upto 2 decimal places.

Weddle-এর নীতি প্রয়োগ করে $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$ এর মান নির্ণয় কর (সঠিক 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত) 6টি অন্তরাল ধরে নিয়ে।

Weddle को नियम द्वारा $\int_0^3 \frac{dx}{1+x^2}$ को निर्णय गर। 6 वटा अन्तरल लिएर अनि 2 दशम्लव places सम्म।

(e) Use Euler's method, solve the following problem for $x = 0.4$ by taking $h = 0.2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x} \quad \text{with} \quad y(0) = 1$$

Euler's পদ্ধতি ব্যবহার করে, $x = 0.4$ এর জন্য নিম্নলিখিত সমস্যাটি সমাধান কর যেখানে $h = 0.2$ এবং $y(0) = 1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x}$ ।

Euler को पद्धति द्वारा दिइएको problem समाधान गर $x = 0.4$ को लागी अनि $h = 0.2$ लिएर।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y+x} \quad y(0) = 1 \text{ संग}$$

## GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

**Answer any *two* questions** 10×2 = 20

**নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও**

**कुनै दुई प्रश्नका उत्तर देऊ**

3. (a) Find a positive root of $x^3 + x - 1 = 0$ by the iterative method, correct to two decimal places. 5

Iterative পদ্ধতিতে $x^3 + x - 1 = 0$ সমীকরণটির 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক কোন একটি ধনাত্মক বীজ নির্ণয় কর।

Iterative पद्धति द्वारा $x^3 + x - 1 = 0$ को धनात्मक मूल प्राप्त गर, दुई दशम्लव places सम्म।

(b) Give the following table: 5

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.0 | 1.6 | 3.8 | 8.2 | 15.4 |

Construct the difference table and compute $f(19)$ by Newton's backward formula.

নিম্নলিখিত সারণী দেওয়া আছে

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.0 | 1.6 | 3.8 | 8.2 | 15.4 |

Difference সারণী গঠন কর এবং Newton's backward সূত্র ব্যবহার করে $f(19)$ এর মান নির্ণয় কর।

दिइएको टेबल यस प्रकार छः

| $x$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.0 | 1.6 | 3.8 | 8.2 | 15.4 |

Difference टेबल बनाऊ अनि Newton को backward सूत्र बाट $f(19)$ निर्णय गर।

4. (a) Solve by Gauss-Seidel iteration method, the system 5

$$3x+9y-2z=11$$
$$4x+2y+13z=24$$
$$4x-2y+z=-8$$

upto three significant figures.

Gauss-Seidel iteration পদ্ধতি ব্যবহার করে নিম্নলিখিত system টি সমাধান কর তিন সার্থক (significant) পরিসংখ্যান (figures) পর্যন্ত

$$3x+9y-2z=11$$
$$4x+2y+13z=24$$
$$4x-2y+z=-8$$

Gauss-Seidel iteration पद्धति द्वारा प्रणाली

$$3x+9y-2z=11$$
$$4x+2y+13z=24$$

$4x-2y+z=-8$ को समाधान गर 3 significant figures सम्म।

(b) Find the value of $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ taking 5-sub-intervals, by Trapezoidal Rule, correct upto 2 significant figures. 5

পাঁচ উপবিস্তার (Sub-intervals) ধরে, Trapezoidal নিয়ম ব্যবহার করে

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$$

এর মান নির্ণয় কর দুই সার্থক (Significant) পরিসংখ্যান (figures) পর্যন্ত সঠিক।

5 उपअन्तरल लिएर $\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx$ को मान 2 significant figure सम्म। Trapezoidal को नियम प्रयोग गरेर निर्णय गर।

5. (a) Prove that: / প্রমাণ করঃ / प्रमाण गर: 3+2

(i) $\Delta\cdot\nabla=\Delta-\nabla$

(ii) $E\cdot\Delta=\Delta\cdot E$

(b) Obtain the missing terms in the following table: 5

নিম্নলিখিত সারণী থেকে অনুপস্থিত সংখ্যা (missing term) নির্ণয় কর।

दिइएको तालिका बाट हराएको term प्राप्त गर:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 8 | — | 64 | — | 216 | 343 | 512 |

6. (a) Use Runge-Kutta method of order 2 to approximate $y$ when $x=0.1$ and $x=0.2$ given that 5

$$\frac{dy}{dx}=y-x,\qquad y(0)=2$$

$x=0.1$ এবং $x=0.2$ ধরে, দুই মাত্রার Runge-Kutta পদ্ধতি ব্যবহার করে $y$-এর মান নির্ণয় কর নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে

$$\frac{dy}{dx}=y-x, \quad y(0)=2$$

$x=0.1$ र $x=0.2$ हुदाँ $y$ को मान अनुमानित गर्नु order 2 भएको Runge-Kutta पद्धति प्रयोग गर। दिइएको छ $\frac{dy}{dx}=y-x$, $y(0)=2$

(b) Discuss the Gauss-elimination method to find the solution of a given system of equations. 5

একটি সমীকরণ তন্ত্রের সমাধান নির্ণয়ের Gauss-elimination পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা কর।

दिइएको समीकरणको प्रणाली को समाधान गर्न Gauss-elimination पद्धति व्याख्या गर।

## DSE-1B

### GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours Full Marks: 60

### GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नहरू उत्तर देऊ।

(a) Prove that if every element of a group $G$ is its own inverse, then it is an abelian group. 3

প্রমাণ কর যে, যদি একটি গ্রুপের (group) প্রতিটি উপাদান তার নিজস্ব inverse হয়, তবে সেটি একটি abelian group হবে।

यदि ग्रुप $G$ को प्रत्येक element यसको आफ्नै inverse हो भने, यो एउटा abelian ग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

(b) In a group $G$, $a$ is an element of order 30, then find the order of $a^{18}$. 3

একটি group $G$ তে, $a$ হল একটি উপাদান যার ক্রম 30, তারপর $a^{18}$-এর ক্রম খোজ।

ग्रुप $G$ मा $a$ order 30 भएको एउटा element हो भने $a^{18}$ को order निर्णय गर।

(c) Cheek whether the set $S=\{(x, y, z): x^2+y^2=z^2\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$ or not. 3

$S=\{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=z^2\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3$-এর একটি সাবস্পেস কিনা তা পরীক্ষা কর।

सेट $S=\{(x, y, z): x^2+y^2=z^2\}$ $\mathbb{R}^3$ को subspace हो वा होइन जाँच गर।

(d) Show that a Linear mapping $T:V\to W$ is injective iff $\ker T=\{\theta_v\}$. 3

দেখাও যে একটি রৈখিক ম্যাপিং $T:V\to W$ injective যদি এবং শুধুমাত্র যদি $\ker T=\{\theta_v\}$।

Linear mapping $T:V\to W$ injective हो यदि अनि यदि मात्र $\ker T=\{\theta_v\}$ भनी प्रमाण गर।

(e) Prove that intersection of two subgroups of a group is a subgroup. 3

প্রমাণ কর যে, একটি group-এর দুটি subgroup-এর ছেদও একটি subgroup হবে।

ग्रुपको दुईवटा उपग्रुप को प्रतिच्छेदन एउटा ग्रुपले हो भनी प्रमाण गर।

(f) Find all generators of the cyclic group generated by the $7^{th}$ roots of unity. 3

1-এর $7^{th}$ তম বীজ দ্বারা উৎপন্ন করা একটি 'cyclic group'-এর সমস্ত 'generators' খোজ।

Unity को $7^{th}$ root बाट उत्पन्न भएको cyclic ग्रुप का सबै generator हरू को निर्णय गर।

## GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions from the following: $6\times4 = 24$

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नहरूको उत्तर देऊ :

(a) Let $GL_2(\mathbb{R})$ denote the group of all $2\times2$ non-singular matrices over $\mathbb{R}$ w. r. t. matrix multiplication. Show that the set $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$ forms a sub-groups of $GL_2(\mathbb{R})$. 6

ধর $GL_2(\mathbb{R})$ একটি group যেটি $\mathbb{R}$-এর উপর সমস্ত $2\times2$ non-singular matrix-এর সংগ্রহ যা matrix গুণ এর সাপেক্ষে group হয়। দেখাও যে, এই সেট $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$-টি $GL_2(\mathbb{R})$ এবং একটি 'Subgroup' গঠন করে।

यदि $GL_2(\mathbb{R})$ ले म्याट्रिक्स गुणनको सन्दर्भमा $\mathbb{R}$ मा सबै $2\times2$ non-singular म्याट्रिक्सहरूको ग्रुप जनाउँछ भने सेट $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$ ले ग्रुप $GL_2(\mathbb{R})$ को उपग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. 6

প্রমাণ কর যে, একটি সীমিত group-এর প্রতিটি subgroup ক্রমটি group-এর ক্রমটির একটি বিভাজক।

एउटा सिमित ग्रुपको प्रत्येक उपग्रुपको order, ग्रुपको order को भाजक हो भनी प्रमाण गर।

(c) Find a basis and dimension of the subspace $W$ of $\mathbb{R}^3$, where 6

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-z=0\}$$

$\mathbb{R}^3$-র subspace $W$ এর basis and dimension খোজ, যেখানে

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-z=0\}$$

$\mathbb{R}^3$ को उप space $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-z=0\}$ को basis अनि dimension निर्णय गर।

(d) Let $(G,\circ)$ be a group. Prove that a non-empty subset $H$ of $G$ forms a subgroup of $(G,\circ)$ if and only if $a\in H$, $b\in H \Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$. 6

ধরি $G$ একটি group। প্রমাণ কর $G$-এর একটি non-empty উপসেট $H$, $(G,\circ)$-এর একটি subgroup গঠন করে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $a\in H$, $b\in H \Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$.

मानौ $(G,\circ)$ एउटा ग्रुप हो। $G$ को एउटा non-empty उपसेट $H$ ले उपग्रुप form गर्छ यदि अनि यदि मात्र $a\in H$, $b\in H \Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(e) A linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ is defined by 6

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z) \quad \text{for} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Find the matrix of $T$ relative to the ordered basis $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$.

$T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, একটি রৈখিক অপেক্ষক যা

$$T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z)$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$ একটি ordered basis-এর সাপেক্ষে $T$-এর ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

एउटा linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ को लागी, $T(x, y, z) = (x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z)$ द्वारा परिभाषित छ । क्रमबद्ध basis $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$ को सापेक्षमा $T$ को म्याट्रिक्स निर्णय गर ।

(f) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6

দেখাও যে একটি cyclic group-এর প্রতিটি subgroup, cyclic হয়।

Cyclic ग्रुपको प्रत्येक उपग्रुप cyclic हो भनी प्रमाण गर ।

## GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

3. Answer any ***two*** questions from the following: $12\times2 = 24$

নিম্নলিখিত যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै **दुई** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) Let $(G, \circ)$ be a finite semigroup in which both the cancellation laws hold. Then show that $(G, \circ)$ is a group. 6

ধরো $(G, \circ)$ এমন একটি semigroup যেখানে উভয় cancellation নীতি প্রযোজ্য। তবে দেখাও যে $(G, \circ)$ একটি group হবে।

मानौ $(G, \circ)$ एउटा सिमित अर्ध ग्रुप हो जस्मा दुवै cancellation को नियम राख्छ । $(G, \circ)$ एउटा ग्रुप हो भनी प्रमाण गर ।

(ii) If $(G, \circ)$ is a group in which $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ and $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ for all $a, b \in G$, then show that $G$ is abelian. 6

যদি $(G, \circ)$ এমন একটি group যার মধ্যে সমস্ত $a$, $b$ এর জন্য $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ এবং $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ প্রযোজ্য হয়, তবে দেখাও যে $(G, \circ)$ একটি abelian group হবে।

यदि $(G, \circ)$ एउटा ग्रुप भए जहाँ $\forall\, a, b \in G$, $(a \circ b)^3 = a^3 \circ b^3$ अनि $(a \circ b)^5 = a^5 \circ b^5$ हुन्छ भने $G$ abelian हो भनी प्रमाण गर ।

(b) (i) State and prove Fermat's Little theorem. 6

Fermat's Little উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং প্রমাণ কর।

Fermat को Little theorem उल्लेख अनि प्रमाण गर ।

(ii) Let $H$ and $K$ be two subgroups of a group $G$. Show that $HK$ is a subgroup of $G$ iff $HK= KH$. 6

ধরে নাও '$H$' এবং '$K$' হল '$G$'-এর দুটো Subgroup। প্রমাণ কর যে, $HK$ হল $G$-এর একটি Subgroup যদি এবং কেবলমাত্র যদি $HK= KH$.

मानौ $H$ र $K$ , $G$ को दुई उपग्रुप हरू हो। $G$ को एउटा उपग्रुप $HK$ हो यदि अनि यदि मात्र $HK= KH$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Show that the set of vectors $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ is linearly dependent in $\mathbb{R}^4$. Find a linearly independent subset $S_1$ of $S$ such that $L(S_1)=L(S)$. 6

দেখাও যে, $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ ভেক্টরের সেটটি $\mathbb{R}^4$-এ রৈখিক ভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)। $S$-এর মধ্যে থেকে একটি রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল উপসেট $S_1$ কে খুঁজে বের কর যাতে $L(S_1)=L(S)$ হবে।

प्रमाण गर सदिशहरू को सेट $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ linearly dependent $\mathbb{R}^4$ मा छ। $S$ को linearly independent उपसेट $S_1$ निर्णय गर जहाँ $L(S_1)=L(S)$।

(ii) Determine the linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, that maps the basis vectors $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ of $\mathbb{R}^3$ to the vectors $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ respectively. 6

একটি রৈখিক অপেক্ষক $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ নির্ণয় কর যা $\mathbb{R}^3$-এর basis ভেক্টর $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ গুলিকে যথাক্রমে $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ কে সূচিত করে।

$\mathbb{R}^3$ को basis सदिशहरू $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ ले $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ सदिशहरूलाई क्रमैसंगले map गर्ने linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ निर्णय गर।

(d) (i) Show that any two bases of a finite dimensional vector space $V$ have the same number of vectors. 6

দেখাও যে, একটি সসীম মাত্রিক (dimension) vector space $V$-এর যেকোন দুটি basis-এ একই সংখ্যক ভেক্টর রয়েছে।

सिमित dimensional सदिश मण्डल $V$ को कुनै दुई bases को समान संख्याको सदिशहरू हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Let $T$ be a linear mapping on $\mathbb{R}^3$ defined by 6

$$T(x,\ y,\ z)=(3x,\ \ x-y,\ \ 2x+y+z)$$

Show that $T$ is invertible and find $T^{-1}$.

$T(x,\ y,\ z)=(3x,\ x-y,\ 2x+y+z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $\mathbb{R}^3$-এ $T$ একটি রৈখিক ম্যাপিং ধরা হল। দেখাও যে, $T$ বিপরীতমুখী (invertible) এবং $T^{-1}$ সন্ধান কর।

यदि $T(x,\ y,\ z)=(3x,\ x-y,\ 2x+y+z)$ ले परिभाषित $T$ एउटा $\mathbb{R}^3$ मा भएको linear mapping भए $T$ invertible हो भनी प्रमाण गर अनि $T$ निर्णय गर।

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

# UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2023

## DSE1/2/3-P1-MATHEMATICS

## (OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.*

**The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.**
**The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.**
**Candidates should mention it clearly on the Answer Book.**

### DSE-1A

### MECHANICS

### GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) Define Astatic equilibrium.

Astatic equilibrium-র সংজ্ঞা দাও।

अस्थिर सन्तुलनको परिभाषा देऊ।

(b) State the forces which will appear in the equation of virtual work.

Virtual work সমীকরণের উপস্থিত বলসমূহ বর্ণনা কর।

भर्चुअल कामको समीकरणमा देखा पर्ने बलहरू उल्लेख गर।

(c) State the conditions of equilibrium of a system of forces acting on a body.

একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলতন্ত্রের জন্য তাহার সাম্যাবস্থায় থাকার শর্তগুলি বর্ণনা কর।

एउटा बडीमा प्रभाव पार्ने बलहरूको प्रणाली को सन्तुलन हुने शर्तहरू उल्लेख गर।

(d) Explain the term 'Artificial Satellite of the Earth'.

পৃথিবীর কৃত্রিম উপগ্রহ বলতে কি বোঝ ?

'पृथ्वीको बनावटी उपग्रह' बारे व्याख्या गर।

(e) Find the length of a simple equivalent pendulum for a circular disc of radius $a$, the axis being a tangent to the disc.

একটি $a$ ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার চাকতি এবং চাকতির স্পর্শক বরাবর অক্ষরেখা ধরে একটি সরল সমতুল্য দোলকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

त्यासार्ध $a$ भएको गोलाकार डिस्क को लागी साधारण equivalent पेंडुलम्को लम्बाइ निर्णय गर, अक्ष डिस्कको स्पर्श रेखा हो।

(f) Find the moment of inertia of a uniform rod of length $2a$ with respect to an axis, perpendicular to the rod and through its middle point.

একটি $2a$ দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দণ্ডের মধ্যবিন্দুগামী এবং উহার সহিত উলম্বভাবে দণ্ডায়মান অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক নির্ণয় কর।

रडको मध्य बिन्दुबाट गएको र रड संग लम्बवत भएको अक्षको सापेक्षमा लम्बाइ $2a$ भएको त्यस समान रडको inertia को moment पत्ता लगाऊ।

## GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions from the following: 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नका उत्तर देऊः

(a) A particle describes an ellipse of eccentricity $e$ about a centre of force at a focus. When the particle is at one end of a major axis its velocity is doubled. Prove that the new path is a hyperbola of eccentricity $\sqrt{9-8e^2}$.

$e$ উৎকেন্দ্রতা বিশিষ্ট কোন একটি নাভি-অভিমুখী কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে চলমান। কণাটি পরাক্ষের একপ্রান্তে পৌছলে ইহার গতিবেগ দ্বিগুণ হয়। প্রমাণ কর নতুন কক্ষপথটি $\sqrt{9-8e^2}$ উৎকেন্দ্রতাবিশিষ্ট পরাবৃত্ত।

फोकसमा एउटा कणले बलको केन्द्रको सापेक्षमा eccentricity $e$ भएको अण्डावृत्त वर्णन गर्छ। Major अक्षको एक छेउमा कणको वेग दुई गुना हुन्छ । नयाँ path, eccentricity $\sqrt{9-8e^2}$ भएको हाइपरबोला हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Write down the equation of motion relative to the centre of inertia.

জড়তা বিন্দু (Centre of inertia) এর সাপেক্ষে গতির সমীকরণটি উল্লেখ কর।

Inertia को केन्द्रको सापेक्षमा गतिको समीकरण लेख।

(c) State and prove the Principle of Virtual Work.

Virtual Work-এর নীতিটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

भर्चुअल कामको सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(d) A force $P$ acts along the axis of $x$ and another force $nP$ acts along a generator of the cylinder $x^2+y^2=a^2$. Show that the central axis lies on the cylinder

$$n^2(nx-1)^2+(1+n^2)^2y^2=n^4a^2$$

একটি বল $P$, $x$ অক্ষ বরাবর এবং অপর একটি বল $nP$, $x^2+y^2=a^2$ চোঙের একটি generator বরাবর কাজ করে। দেখাও যে কেন্দ্রীয় অক্ষটি (Central axis) $n^2(nx-1)^2+(1+n^2)^2y^2=n^4a^2$ চোঙের অবস্থান করে।

एउटा बल $P$ ले अक्ष संगै प्रभाव पार्छ अनि आर्को बल $nP$ ले सिलिन्डर $x^2+y^2=a^2$ को generator संगै प्रभाव पार्छ । केन्द्रीय कक्ष सिलिन्डर $n^2(nx-1)^2+(1+n^2)^2y^2=n^4a^2$ मा छ भनी प्रमाण गर ।

(e) Find the minimum time of Oscillation of a Compound Pendulum.

সমতুল্য দোলকের সর্বনিম্ন দোলনকাল নির্ণয় কর।

एउटा यौगिक पेंडुलमको दोलन् (Oscillation) हुनै न्यूनतम समय निर्णय गर ।

(f) State and Prove D'Alembert's Principle.

D'Alembert-এর নীতিটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

D'Alembert को सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर ।

## GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

3. Answer any ***two*** questions from the following: 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै **दुई** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) A square lamina rests with its plane perpendicular to a smooth wall, one corner being attached to a point in the wall by a fine string of length equal to the side of the square. Find the position of equilibrium and show that it is stable. 8+4

একটি বর্গাকার পাতকে (square lamina) একটি মসৃণ দেওয়ালের সহিত উল্লম্বভাবে এমনভাবে রাখা হয়েছে যেখানে পাতের একটি কোণ (Corner) দেওয়ালের একটি বিন্দুর সহিত উক্ত বর্গাকার পাতের বাহুর সহিত সমান একটি সূক্ষ্ম (fine) দড়ির সাহায্যে যুক্ত। তাহলে উক্ত বর্গাকার পাতের সাম্যের (equilibrium) অবস্থান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে স্থিতাবস্থায় (stable) রয়েছে।

एउटा वर्गाकार लेमिना आफ्नो समतललाई चिल्लो पर्खालसँग लम्बवत राख्छ । त्यसको एक छेऊ वर्गाकारको साइड जत्रो लम्बाइ भएको तारले पर्खाल सँग एउटा विन्दुमा जोड़िएको छ । सन्तुलनको अवस्था निर्णय गर र त्यसको स्थिरता देखाऊ ।

(ii) State and prove the principle of conservation of energy under impulsive force.

ঘাত বল (Impulsive force)-এর অধীনস্থ শক্তির নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

आवेगात्मक बलहरू अन्तर्गत् ऊर्जाको संरक्षणको सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर ।

(b) (i) Deduce the condition of stability of an orbit which is nearly circular under the action of a central force $F=\phi(u)$ , where $u=\frac{1}{r}$. 6+6

$F=\phi(u)$ যেখানে $u=\frac{1}{r}$ কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে প্রায় গোলাকার কোন কৃষ্ণপথের স্থিতিশীলতার শর্তগুলি উল্লেখ কর।

केन्द्रीय बल $F=\phi(u)$, जहाँ $u=\frac{1}{r}$ को प्रभाव अन्तर्गत लगभग गोलाकार भएको कक्षको स्थिरताको अवस्था अनुमान गर।

(ii) Obtain the velocity and acceleration of a moving particle referred to rectangular axes $OX$ and $OY$ which are not fixed in space but rotate about the origin in their own plane.

শূন্যে স্থায়ী নয় কিন্তু মূলবিন্দুর সাপেক্ষে নিজস্ব তলে ঘুরতে সক্ষম আয়তক্ষেত্রাকার অক্ষদ্বয় $OX$ এবং $OY$-এর সাপেক্ষে কোন একটি চলমান কণার গতিবেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

Space मा fix नभएको तर आफ्नै समतलको उत्पत्ति का परिक्रमा गर्ने आयताकार अक्षहरू $OX$ र $OY$ मा उल्लेखित एउटा चल्ने कणको वेग र प्रवेग निर्णय गर।

(c) (i) State and prove the principle of conservation of Moment or Angular Momentum. 6+6

Moment বা Angular Momentum-এর নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

Moment अथवा कोणीय Momentum को संरक्षणको सिद्धान्त उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ii) Prove that in a Central orbit, the sectorial area traced out by the radius vector through the centre of force to the particle per unit time is constant.

প্রমাণ কর কেন্দ্রীয় কক্ষপথে গতিশীল কোন কণার উপর কেন্দ্রীয় বল বরাবর ব্যাসার্ধ ভেক্টরটি একক সময়ে যে ক্ষেত্রটি গমন করে তা ধ্রুবক হয়।

एउटा केन्द्रीय कक्षमा सदिश भेक्टर द्वारा बलको केन्द्रबाट कणको प्रति एकाइ समयको बिचमा निकालिएको क्षेत्रीय क्षेत्र स्थिरांक हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(d) (i) Let $AB$ be a rod with two different weights $W_a$ and $W_b$ are suspended from two ends respectively. If $AB$ makes an angle $\theta$ with the vertical, then prove that $\tan\theta=\frac{b^2}{a^2+2ab}$. 6+6

ধর $AB$ একটি রড যার দুই প্রান্তে দুটি ভিন্ন ওজন $W_a$ এবং $W_b$ ঝোলানো আছে। উলম্বের সাথে $AB$ রডটি $\theta$ কোণ করলে প্রমাণ কর $\tan\theta=\frac{b^2}{a^2+2ab}$.

मानौ $AB$ दुई भिन्न ओजन $W_a$ र $W_b$ भएको रड हो जो क्रमै संगले दुई छेउमा झुण्डाएको छ। यदि $AB$ ले vertical संग कोण $\theta$ बनाउँछ भने प्रमाण गर, $\tan\theta=\frac{b^2}{a^2+2ab}$ ।

(ii) Find the moment of Inertia of a rigid body about any line, given the moments and products of inertia about three perpendicular axes.

একটি line-এর সাপেক্ষে একটি দৃঢ় বস্তুর (Rigid body) জড়তা ভ্রামক (Moment of Inertia) নির্ণয় কর, যেখানে তিনটি অক্ষের সাপেক্ষে Moments এবং Products of inertia দেওয়া আছে।

कुनै रेखामा ठोस् बडी की inertia को moment पत्ता लगाऊ, जहाँ तिन लम्बवत अक्षहरूको सन्दर्भमा moment र inertia को गुणन दिइएको छ।

## DSE-1B

### GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

### GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: $3\times4 = 12$
নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै ***चार*** प्रश्नहरू उत्तर देऊ।

(a) Prove that if every element of a group $G$ is its own inverse, then it is an abelian group. 3
প্রমাণ কর যে, যদি একটি গ্রুপের (group) প্রতিটি উপাদান তার নিজস্ব inverse হয়, তবে সেটি একটি abelian group হবে।
यदि ग्रुप $G$ को प्रत्येक element यसको आफ्नै inverse हो भने, यो एउटा abelian ग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

(b) In a group $G$, $a$ is an element of order 30, then find the order of $a^{18}$. 3
একটি group $G$ তে, $a$ হল একটি উপাদান যার ক্রম 30, তারপর $a^{18}$ -এর ক্রম খোজ।
ग्रुप $G$ मा $a$ order 30 भएको एउटा element हो भने $a^{18}$ को order निर्णय गर।

(c) Cheek whether the set $S=\{(x,\ y,\ z):\ x^2+y^2=z^2\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$ or not. 3
$S=\{(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2=z^2\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3$-এর একটি সাবস্পেস কিনা তা পরীক্ষা কর।
सेट $S=\{(x,\ y,\ z):\ x^2+y^2=z^2\}$ $\mathbb{R}^3$ को subspace हो वा होइन जाँच गर।

(d) Show that a Linear mapping $T:V\to W$ is injective iff $\ker T=\{\theta_V\}$. 3
দেখাও যে একটি রৈখিক ম্যাপিং $T:V\to W$ injective যদি এবং শুধুমাত্র যদি $\ker T=\{\theta_V\}$।
Linear mapping $T:V\to W$ injective हो यदि अनि यदि मात्र $\ker T=\{\theta_V\}$ भनी प्रमाण गर।

(e) Prove that intersection of two subgroups of a group is a subgroup. 3
প্রমাণ কর যে, একটি group-এর দুটি subgroup-এর ছেদও একটি subgroup হবে।
ग्रुपको दुईवटा उपग्रुप को प्रतिच्छेदन एउटा ग्रुपले हो भनी प्रमाण गर।

(f) Find all generators of the cyclic group generated by the $7^{\text{th}}$ roots of unity. 3
1-এর $7^{\text{th}}$ তম বীজ দ্বারা উৎপন্ন করা একটি ‘cyclic group’-এর সমস্ত ‘generators’ খোজ।
Unity को $7^{\text{th}}$ root बाट उत्पन्न भएको cyclic ग्रुप का सबै generator हरू को निर्णय गर।

### GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions from the following: $6\times4 = 24$
নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै ***चार*** प्रश्नहरूको उत्तर देऊ :

(a) Let $GL_2(\mathbb{R})$ denote the group of all $2\times2$ non-singular matrices over $\mathbb{R}$ w. r. t. matrix multiplication. Show that the set $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$ forms a sub-groups of $GL_2(\mathbb{R})$. 6

ধর $GL_2(\mathbb{R})$ একটি group যেটি $\mathbb{R}$-এর উপর সমস্ত $2\times 2$ non-singular matrix-এর সংগ্রহ যা matrix গুণ এর সাপেক্ষে group হয়। দেখাও যে, এই সেট $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$-টি $GL_2(\mathbb{R})$ এবং একটি 'Subgroup' গঠন করে।

यदि $GL_2(\mathbb{R})$ ले म्याट्रिक्स गुणनको सन्दर्भमा $\mathbb{R}$ मा सबै $2\times 2$ non-singular म्याट्रिक्सहरूको ग्रुप जनाउँछ भने सेट $H=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2=1\right\}$ ले ग्रुप $GL_2(\mathbb{R})$ को उपग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. 6

প্রমাণ কর যে, একটি সীমিত group-এর প্রতিটি subgroup ক্রমটি group-এর ক্রমটির একটি বিভাজক।

एउटा सिमित ग्रुपको प्रत्येक उपग्रुपको order, ग्रुपको order को भाजक हो भनी प्रमाण गर।

(c) Find a basis and dimension of the subspace $W$ of $\mathbb{R}^3$, where 6

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$$

$\mathbb{R}^3$-র subspace $W$ এর basis and dimension খোজ, যেখানে

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$$

$\mathbb{R}^3$ को उप space $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ को basis अनि dimension निर्णय गर।

(d) Let $(G,\circ)$ be a group. Prove that a non-empty subset $H$ of $G$ forms a subgroup of $(G,\circ)$ if and only if $a\in H$, $b\in H\Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$. 6

ধরি $G$ একটি group। প্রমাণ কর $G$-এর একটি non-empty উপসেট $H$, $(G,\circ)$-এর একটি subgroup গঠন করে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $a\in H$, $b\in H\Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$.

मानौ $(G,\circ)$ एउटा ग्रुप हो। $G$ को एउटा non-empty उपसेट $H$ ले उपग्रुप form गर्छ यदि अनि यदि मात्र $a\in H$, $b\in H\Rightarrow a\circ b^{-1}\in H$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(e) A linear mapping $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ is defined by 6

$$T(x,y,z)=(x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z) \quad \text{for} \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Find the matrix of $T$ relative to the ordered basis $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$.

$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$, একটি রৈখিক অপেক্ষক যা

$$T(x,y,z)=(x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z)$$

দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$ একটি ordered basis-এর সাপেক্ষে $T$-এর ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর।

एउटा linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^3$ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ को लागी, $T(x,y,z)=(x+2y+3z,\ 2x+3y+z,\ 3x+y+2z)$ द्वारा परिभाषित छ। क्रमबद्ध basis $\{(2,1,0),\ (0,0,1),\ (0,2,1)\}$ को सापेक्षमा $T$ को म्याट्रिक्स निर्णय गर।

(f) Show that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6

দেখাও যে একটি cyclic group-এর প্রতিটি subgroup, cyclic হয়।

Cyclic ग्रुपको प्रत्येक उपग्रुप cyclic हो भनी प्रमाण गर।

## GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

3. Answer any ***two*** questions from the following: $12\times2 = 24$

নিম্নলিখিত যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै **दुई** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) Let $(G, \circ)$ be a finite semigroup in which both the cancellation laws hold. Then show that $(G, \circ)$ is a group. 6

ধরো $(G, \circ)$ এমন একটি semigroup যেখানে উভয় cancellation নীতি প্রযোজ্য। তবে দেখাও যে $(G, \circ)$ একটি group হবে।

मानौ $(G, \circ)$ एउटा सिमित अर्ध ग्रुप हो जस्मा दुवै cancellation को नियम राख्छ। $(G, \circ)$ एउटा ग्रुप हो भनी प्रमाण गर।

(ii) If $(G, \circ)$ is a group in which $(a\circ b)^3 = a^3\circ b^3$ and $(a\circ b)^5 = a^5\circ b^5$ for all $a, b\in G$, then show that $G$ is abelian. 6

যদি $(G, \circ)$ এমন একটি group যার মধ্যে সমস্ত $a$, $b$ এর জন্য $(a\circ b)^3 = a^3\circ b^3$ এবং $(a\circ b)^5 = a^5\circ b^5$ প্রযোজ্য হয়, তবে দেখাও যে $(G, \circ)$ একটি abelian group হবে।

यदि $(G, \circ)$ एउटा ग्रुप भए जहाँ $\forall\, a, b\in G$, $(a\circ b)^3 = a^3\circ b^3$ अनि $(a\circ b)^5 = a^5\circ b^5$ हुन्छ भने $G$ abelian हो भनी प्रमाण गर।

(b) (i) State and prove Fermat's Little theorem. 6

Fermat's Little উপপাদ্যটি বর্ণনা এবং প্রমাণ কর।

Fermat को Little theorem उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ii) Let $H$ and $K$ be two subgroups of a group $G$. Show that $HK$ is a subgroup of $G$ iff $HK= KH$. 6

ধরে নাও '$H$' এবং '$K$' হল '$G$'-এর দুটো Subgroup। প্রমাণ কর যে, $HK$ হল $G$-এর একটি Subgroup যদি এবং কেবলমাত্র যদি $HK= KH$.

मानौ $H$ र $K$ , $G$ को दुई उपग्रुप हरू हो। $G$ को एउटा उपग्रुप $HK$ हो यदि अनि यदि मात्र $HK= KH$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Show that the set of vectors $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ is linearly dependent in $\mathbb{R}^4$. Find a linearly independent subset $S_1$ of $S$ such that $L(S_1)=L(S)$. 6

দেখাও যে, $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ ভেক্টরের সেটটি $\mathbb{R}^4$-এ রৈখিক ভাবে নির্ভরশীল (linearly dependent)। $S$-এর মধ্যে থেকে একটি রৈখিকভাবে অনির্ভরশীল উপসেট $S_1$ কে খুঁজে বের কর যাতে $L(S_1)=L(S)$ হবে।

प्रमाण गर सदिशहरू को सेट $S=\{(1,2,3,0),\ (2,1,0,5),\ (1,1,1,1),\ (2,3,4,1)\}$ linearly dependent $\mathbb{R}^4$ मा छ। $S$ को linearly independent उपसेट $S_1$ निर्णय गर जहाँ $L(S_1)=L(S)$।

(ii) Determine the linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, that maps the basis vectors $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ of $\mathbb{R}^3$ to the vectors $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ respectively. 6

একটি রৈখিক অপেক্ষক $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ নির্ণয় কর যা $\mathbb{R}^3$-এর basis ভেক্টর $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ গুলিকে যথাক্রমে $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ কে সূচিত করে।

$\mathbb{R}^3$ को basis सदिशहरू $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ ले $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ सदिशहरूलाई क्रमैसंगले map गर्ने linear mapping $T:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ निर्णय गर।

(d) (i) Show that any two bases of a finite dimensional vector space $V$ have the same number of vectors. 6

দেখাও যে, একটি সসীম মাত্রিক (dimension) vector space $V$-এর যেকোন দুটি basis-এ একই সংখ্যক ভেক্টর রয়েছে।

सिमित dimensional सदिश मण्डल $V$ को कुनै दुई bases को समान संख्याको सदिशहरू हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Let $T$ be a linear mapping on $\mathbb{R}^3$ defined by 6

$$T(x,\ y,\ z) = (3x,\ \ x-y,\ \ 2x+y+z)$$

Show that $T$ is invertible and find $T^{-1}$.

$T(x,\ y,\ z) = (3x,\ \ x-y,\ 2x+y+z)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $\mathbb{R}^3$-এ $T$ একটি রৈখিক ম্যাপিং ধরা হল। দেখাও যে, $T$ বিপরীতমুখী (invertible) এবং $T^{-1}$ সন্ধান কর।

यदि $T(x,\ y,\ z) = (3x,\ \ x-y,\ \ 2x+y+z)$ ले परिभाषित $T$ एउटा $\mathbb{R}^3$ मा भएको linear mapping भए $T$ invertible हो भनी प्रमाण गर अनि $T$ निर्णय गर।

——×——